Euler wykorzystał wzór (8.3), by wykazać rozbieżność szeregu odwrotności wszystkich liczb pierwszych. Pokażemy tu nieco inny wariant jego rozumowania, dostępny dla każdego, kto wie, że $e^{x+w} = e^x e^w$, zna nierówność $e^x \geq 1 + x$ (orzekającą, że wykres funkcji wykładniczej leży ponad styczną poprowadzoną doń w punkcie o współrzędnych $x = 0$, $y = e^0 = 1$) i rozumie, że rozkład na czynniki pierwsze jest jednoznaczny.

Weźmy liczbę naturalną N i wszystkie liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$ z przedziału $[1, N]$. Niech S_N oznacza sumę odwrotności liczb p_i, tzn. $S_N = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$. Wtedy

$$e^{S_N} = e^{\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}} = e^{\frac{1}{p_1}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{p_n}} \geq \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n}\right),$$

gdyż dla każdej liczby pierwszej p jest $e^{1/p} \geq 1 + \frac{1}{p}$. Mnożąc wszystkie nawiasy po prawej stronie, otrzymamy jedynkę i sumę ułamków, które w liczniku mają jedynkę, a w mianowniku iloczyn pewnej liczby *różnych* liczb p_i. Dla $N = 1000$ wśród tych ułamków będzie np. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ (bo $6 = 2 \cdot 3$) i $\frac{1}{210}$ (bo $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$), ale nie będzie $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$ czy $\frac{1}{999}$, bo każda z liczb 9, 12 i 999 jest podzielna przez *kwadrat* pewnej liczby pierwszej. Po chwili zastanowienia dochodzimy do wniosku, że ponieważ czynniki pierwsze każdej liczby naturalnej są nie większe od niej, więc

$$e^{S_N} \geq \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ bezkwadratowe}}} \frac{1}{n},$$

tzn. liczba e^{S_N} przekracza sumę odwrotności *wszystkich* liczb bezkwadratowych[3] z przedziału $[1, N]$.

Pomnóżmy obie strony tej nierówności przez 2. Po co? Żeby odnaleźć odwrotności kwadratów, których dotychczas brakowało. Wiemy bowiem, że

$$2 > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

[3]Liczba n jest bezkwadratowa, jeśli nie jest podzielna przez żaden pełny kwadrat większy od 1; np. 6, 15 i 210 są bezkwadratowe, ale 68 nie jest, gdyż dzieli się przez $4 = 2^2$.