2. Równanie falowe

2.1. Równanie struny i wzór d'Alemberta

Niech L oznacza operator różniczkowy dany wzorem

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Zauważmy, że $L = L_2 \circ L_1$, gdzie

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}, \qquad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}.$$

Rozważymy zagadnienie początkowe Cauchy'ego dla równania struny swobodnej:

$$\begin{cases} Lu \equiv u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Funkcje $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$ są z góry dane (opisują, odpowiednio, początkowe wychylenie struny z położenia równowagi oraz jej początkową prędkość). Niewiadomą jest funkcja u, klasy C^2.

Uwaga. Ściślej mówiąc, będziemy poszukiwać rozwiązania klasy C^1 w półpłaszczyźnie domkniętej $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, które jest klasy C^2 na półpłaszczyźnie otwartej $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Etap 1. Wyznaczymy postać wszystkich rozwiązań równania $Lu = 0$. Rozbijemy to zadanie na dwa kroki: rozwiążemy równania $L_1 u = v$ i $L_2 v = 0$

(A) Załóżmy, że $L_2 v = 0$ w pewnym zbiorze wypukłym $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Niech ℓ_γ oznacza prostą $x - ct = \gamma = \text{const}$ ($\gamma \in \mathbb{R}$). Połóżmy $h = v\,|_{\ell_\gamma}$, to znaczy, ściśle mówiąc,

$$h(t) := v(\gamma + ct, t).$$

Wtedy

$$h'(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\gamma + ct, t) \cdot c + \frac{\partial v}{\partial t}(\gamma + ct, t) = L_2 v(\gamma + ct, t) = 0.$$

Innymi słowy, funkcja v jest stała na odcinku prostej ℓ_γ zawartym w zbiorze E. Zatem,

$$v(x,t) = \varphi(x - ct) \tag{2.2}$$

dla pewnej funkcji $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (intuicyjnie: wartość $v(x,t)$ zależy tylko od $\gamma = x - ct$, tzn. od tego, na której z prostych ℓ_γ leży punkt (x,t)).

(B) Dobierzmy funkcję $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby $-2c\alpha' = \varphi$. Wtedy[1]

$$L_1\alpha(x - ct) = -c\alpha'(x - ct) - c\alpha'(x - ct) = \varphi(x - ct) = v(x,t).$$

Zatem $L_1(u(x,t) - \alpha(x - ct)) = v(x,t) - v(x,t) = 0$. Powtarzając teraz rozumowanie (A) (ze zmianą c na $-c$), przekonujemy się, że

$$u(x,t) - \alpha(x - ct) = \beta(x + ct),$$

to znaczy

$$u(x,t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct). \tag{2.3}$$

Uwaga. Z tego wzoru wynika, że wśród rozwiązań równania struny są takie funkcje, które należą do klasy C^2, ale w żadnym punkcie nie mają pochodnych trzeciego rzędu. Ponadto, przestrzeń wszystkich rozwiązań ma taki wymiar, jak przestrzeń funkcji klasy C^2: nieskończony. Jest więc zupełnie inaczej niż dla liniowych równań zwyczajnych o stałych współczynnikach: ich rozwiązania są funkcjami klasy C^∞; jeśli równanie ma rząd równy n, to przestrzeń wszystkich rozwiązań jest n-wymiarowa.

Etap 2. Wykorzystując warunki $u(x,0) = f(x)$ i $u_t(x,0) = g(x)$, dobierzemy funkcje α i β.

Musi być oczywiście

$$\alpha(x) + \beta(x) = f(x),$$
$$c(\alpha'(x) - \beta'(x)) = -g(x).$$

[1] Uwaga: w następnej linijce zapis $L_1\alpha(x - ct)$ oznacza wynik działania operatora L_1 na funkcję dwóch zmiennych $(x,t) \mapsto \alpha(x - ct)$. Podobną konwencją będziemy posługiwać się dalej.

(Pierwszą równość otrzymujemy wstawiając $t = 0$ do (2.3), drugą – różniczkując (2.3) względem t i wstawiając $t = 0$). Ponieważ zaś dla dowolnych x_1 i x_2 mamy

$$\alpha(x_1) + \beta(x_2) = \frac{1}{2}\Big(\alpha(x_1) + \beta(x_1) + \alpha(x_2) + \beta(x_2)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (\beta'(s) - \alpha'(s))\,\mathrm{d}s,$$

więc, wstawiając $x_1 = x - ct$, $x_2 = x + ct$ dostaniemy ostatecznie

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

Jest to właśnie **wzór d'Alemberta**.

Podsumujmy dotychczasowe rozważania.

Stwierdzenie 2.1.

(i) Każde rozwiązanie $u \in C^2$ zagadnienia Cauchy'ego (2.1) dla struny nieskończonej spełnia wzór (2.4), jest więc **jednoznacznie wyznaczone** przez dane początkowe f, g.

(ii) Dla dowolnych $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$ wzór (2.4) określa funkcję $u \in C^2$, która spełnia (2.1).

O tym, że wzór d'Alemberta rzeczywiście określa rozwiązanie równania falowego, przekonujemy się natychmiast bezpośrednim rachunkiem.

(iii) Jeśli

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |f_1(s) - f_2(s)| < \varepsilon, \qquad \sup_{s\in\mathbb{R}} |g_1(s) - g_2(s)| < \varepsilon,$$

to odpowiednie rozwiązania u_1 i u_2 zagadnienia Cauchy'ego spełniają nierówność

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le (1+T)\varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x\in\mathbb{R},\ t\in[0,T].$$

(iv) Liczba $u(x,t)$ zależy tylko od wartości f w punktach $x \pm ct$ i wartości g w punktach $y \in [x - ct, x + ct]$.

Ostatni warunek ma jasną interpretację fizyczną: c jest prędkością, z jaką rozchodzi się fala.

2.2. Wzór Kirchhoffa. Zasada Huygensa

Przejdziemy teraz do równania falowego dla $n = 3$ (tzn. w trzech wymiarach przestrzennych). Aby rozwiązać zagadnienie

Cauchy'ego, sprowadzimy je – wykorzystując metodę znalezioną przez Poissona – do jednowymiarowego zagadnienia Cauchy'ego dla równania struny. Nie będzie to jednak struna nieskończona, jak w poprzednim podrozdziale, lecz struna półnieskończona; zajmijmy się nią przez chwilę.

2.2.1. Struna półnieskończona

Rozważmy zagadnienie początkowo-brzegowe

$$\begin{cases} Lu \equiv u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{dla } x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \geq 0, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{dla } x \geq 0, \\ u(0,t) = 0 & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

(„Lewy koniec" struny jest zaczepiony i nie zmienia swego położenia. Aby drugi i czwarty warunek nie były sprzeczne, należy przyjąć, że $f(0) = 0$). Z wcześniejszych rozważań wynika, że

$$u(x,t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct),$$

gdyż wyprowadzając wzór d'Alemberta, zakładaliśmy jedynie, że u spełnia równanie $Lu = 0$ **na pewnym wypukłym podzbiorze** płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Funkcje α i β powinny spełniać warunki

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \beta(x) &= f(x), & x &\geq 0, \\ c(\alpha'(x) - \beta'(x)) &= -g(x), & x &\geq 0, \\ \alpha(-ct) + \beta(ct) &= 0, & t &\geq 0. \end{aligned}$$

Ponadto, do α można dodać stałą, odejmując ją jednocześnie od β. Możemy więc przyjąć, że $\alpha(0) = \beta(0) = \frac{1}{2} f(0) = 0$. Znając f i g, wyznaczymy α i β dla $x \geq ct$ tak samo jak wcześniej, zatem

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{dla } x \geq ct.$$

Aby określić u dla $x < ct$, należy wyrazić α na przedziale $(-\infty, 0)$ przez f i g. To nietrudne: dla $s \geq 0$, mamy

$$\alpha(-s) = -\beta(s) = \alpha(s) - f(s), \tag{2.6}$$

a ponieważ

$$\beta(x) - \alpha(x) = \frac{1}{c} \int\limits_0^x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

(α i β znikają w zerze!), więc z warunku $\alpha+\beta=f$ dla $x\ge 0$ mamy

$$\alpha(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.7}$$

$$\beta(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.8}$$

Z równości (2.7) i (2.6) dostaniemy

$$\alpha(-x)=-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad x\ge 0,$$

to znaczy

$$\alpha(x-ct)=-\frac{1}{2}f(ct-x)+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{0} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad \text{dla } x<ct.$$

Zatem, ze wzoru $u(x,t)=\alpha(x-ct)+\beta(x+ct)$ mamy

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{dla } x<ct.$$

Warto zauważyć, że efekt jest bardzo prosty: funkcja u jest określona tak, jakbyśmy przedłużyli f i g do funkcji nieparzystych na całej prostej, rozwiązali równanie struny w półpłaszczyźnie $x\in\mathbb{R}$, $t\ge 0$ i obcięli rozwiązanie do $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Innymi słowy: fala, która dochodzi do zamocowanego końca struny, odbija się, zmienia fazę i, nie tracąc energii, zaczyna biec w przeciwną stronę.

2.2.2. Średnie sferyczne i wyprowadzenie wzoru Kirchhoffa

Po tych przygotowaniach przejdźmy do zagadnienia Cauchy'ego dla równania falowego w $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$. Poszukujemy rozwiązań problemu

$$\begin{cases} Lu\equiv u_{tt}-c^2\Delta_x u=0 & \text{dla } x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u(x,0)=f(x) & \text{dla } x\in\mathbb{R}^3,\\ u_t(x,0)=g(x) & \text{dla } x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.9}$$

Jak poprzednio, będziemy zakładać, że rozwiązanie jest klasy C^1 na półprzestrzeni domkniętej i klasy C^2 w jej wnętrzu.

Aby sprowadzić (2.9) do zagadnienia jednowymiarowego, będziemy dla $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rozważać **średnie**

$$\begin{aligned} I_h(x,r) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=1} h(x+ry)\,\mathrm{d}\sigma_y \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S^2(x,r)} h(\xi)\,\mathrm{d}\sigma_\xi. \end{aligned}$$

Jak widać, $I_h(x,r)$ oznacza średnią wartość funkcji h na sferze o środku x i promieniu r. Nietrudno stwierdzić, że:

- Jeśli dla pewnego $s = 0,1,2,\dots$ funkcja $h \in C^s(\mathbb{R}^3)$, to również $I_h \in C^s(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$;
- $\lim\limits_{r\to 0} I_h(x,r) = h(x)$ dla każdej funkcji ciągłej h i dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^3$.

Stosując twierdzenie Fubiniego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(0,R)} h(x+z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_0^R \Bigg(\int\limits_{|z|=r} h(x+z)\,\mathrm{d}\sigma_z \Bigg)\mathrm{d}r \\ &= \int\limits_0^R 4\pi r^2 I_h(x,r)\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{2.10}$$

(Aby uzyskać drugą równość, zmieniamy w wewnętrznej całce zmienną z z na $y = z/r \in S^2(0,1)$; wtedy $d\sigma_z = r^2 d\sigma_y$.)

Udowodnimy teraz dwie własności średnich I_h.

LEMAT 2.2. Dla funkcji $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ zachodzi równość

$$\Delta_x \Bigg(\int\limits_0^R 4\pi r^2 I_h(x,r)\,\mathrm{d}r \Bigg) = 4\pi R^2 \frac{\partial}{\partial R} I_h(x,R).$$

Dowód. Lewą stronę równości z tezy lematu przekształcimy, posługując się kolejno: wzorem (2.10), twierdzeniem Gaussa–Ostrogradskiego i zamianą zmiennych $S^2(0,R) \ni z \mapsto y = z/r \in S^2(0,1)$. Zauważając, że wektor normalny do sfery $S^2(0,R)$ w punkcie z dany jest wzorem $\boldsymbol{n}(z) = z/R$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Delta_x\Big(\int_0^R 4\pi r^2 I_h(x,r)\,\mathrm{d}r\Big) &= \int_{B(0,R)} \Delta h(x+z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{S^2(0,R)} \nabla h(x+z)\cdot\frac{z}{R}\,\mathrm{d}\sigma_z \\
&= \int_{S^2(0,1)} \underbrace{R^2\sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+Ry)\cdot y_i}_{=\frac{\partial}{\partial R}h(x+Ry)}\,\mathrm{d}\sigma_y \\
&= 4\pi R^2\frac{\partial}{\partial R}I_h(x,R).
\end{aligned}$$ □

LEMAT 2.3. Dla funkcji $h\in C^2(\mathbb{R}^3)$ zachodzi równość

$$\Delta_x r\ I_h(x,r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} r\ I_h(x,r).$$

Dowód. Różniczkując względem R obie strony równości z tezy lematu 2.2, otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial R}\Delta_x\int_0^R r^2 I_h(x,r)\,\mathrm{d}r = \frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}I_h(x,R).$$

Z twierdzenia Newtona–Leibniza wynika, że lewa strona jest równa $\Delta_x R^2 I_h(x,R)$, więc

$$\Delta_x R I_h(x,R) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}I_h(x,R).$$

Aby otrzymać tezę lematu, wystarczy sprawdzić, że dla dowolnej dwukrotnie różniczkowalnej funkcji f jednej zmiennej s mamy

$$\frac{1}{s}\Big(s^2 f'(s)\Big)' = (sf(s))''.$$

Pozostawiamy to sprawdzenie jako łatwe zadanie dla Czytelnika. □

Oznaczmy teraz symbolem Ψ_r operator, który funkcji h przyporządkowuje $rI_h(\cdot,r)$, to znaczy niech

$$\Psi_r h(x) = rI_h(x,r).$$

Uwaga. Pisząc $\Psi_r(Lu)$ i $\Psi_r u$, traktujemy zmienną t jako dodatkowy parametr – operację uśredniania, występującą w definicji Ψ_r, aplikujemy tylko do zmiennych x.

(Dla $r = 0$ wygodnie jest przyjąć $\Psi_r h = 0$). Obliczając $\Psi_r(Lu)$, dla $Lu = u_{tt} - c^2\Delta_x u = 0$, dostaniemy

$$0 = \Psi_r(Lu) = L(\Psi_r u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Psi_r u.$$

(Ostatnia równość jest treścią lematu 2.3.) Po prawej stronie x odgrywa rolę parametru, zmiennymi są zaś r („położenie") i t („czas"). Ponieważ $r \geq 0$ i $t \geq 0$, więc mamy do czynienia z równaniem struny półnieskończonej. Warunki początkowo-brzegowe to

$$\begin{cases} \Psi_r u = \Psi_r f & \text{dla } t = 0,\ r \geq 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\Psi_r u = \Psi_r g & \text{dla } t = 0,\ r \geq 0, \\ \Psi_r u = 0 & \text{dla } t \geq 0,\ r = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Funkcję $\Psi_r u$ wyrazimy, stosując wzór d'Alemberta. Ponieważ naszym ostatecznym celem jest znalezienie wartości u (co wymaga obliczenia średnich $I_u(x,r)$ i **przejścia do granicy** $r \to 0$), więc zainteresujemy się wartościami $r < ct$. Podstawiając wypisane wyżej wartości początkowe do wzoru na rozwiązanie równania struny, otrzymujemy:

$$\Psi_r u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\Psi_{ct+r}f(x) - \Psi_{ct-r}f(x)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r}\Psi_\xi g(x)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.12}$$

Ponieważ

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{S^2(0,1)} u(x+ry,t)\,\mathrm{d}\sigma_y = \lim_{r\to 0}\frac{\Psi_r u(x,t)}{r},$$

więc (2.12) prowadzi do

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial r}\Psi_r f(x)\bigg|_{r=ct} + \frac{1}{c}\Psi_{ct}g(x). \tag{2.13}$$

Aby wyrazić u jawnym wzorem, pozostaje obliczyć pochodną względem r. Otóż,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\Psi_r f(x)\bigg|_{r=ct} \\ &\quad = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{|y|=1} f(x+ry)\,\mathrm{d}\sigma_y + r\int_{|y|=1}\frac{\partial}{\partial r}\,f(x+ry)\,\mathrm{d}\sigma_y\right)\bigg|_{r=ct} \\ &\quad = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{S^2(0,1)} f(x+cty)\,\mathrm{d}\sigma_y\right). \end{aligned}$$

Podstawiając ten wynik do wzoru (2.13), dostaniemy

$$4\pi u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int\limits_{S^2(0,1)} f(x+cty)\,\mathrm{d}\sigma_y\right) + t \int\limits_{S^2(0,1)} g(x+cty)\,\mathrm{d}\sigma_y, \tag{2.14}$$

lub równoważnie, po zamianie zmiennych $S^2(0,1) \ni y \mapsto z = x + cty \in S^2(x,ct)$,

$$4\pi c^2 u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \int\limits_{S^2(x,ct)} f(z)\,\mathrm{d}\sigma_z\right) + \frac{1}{t} \int\limits_{S^2(x,ct)} g(z)\,\mathrm{d}\sigma_z. \tag{2.15}$$

Zarówno wzór (2.14), jak i wzór (2.15) bywają nazywane **wzorem Kirchhoffa**.

Jak wcześniej, podsumujmy wyniki naszych rozważań i rachunków.

TWIERDZENIE 2.4. Jeśli $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, to zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego w $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ ma dokładnie jedno rozwiązanie u klasy C^2. To rozwiązanie jest określone wzorem Kirchhoffa (2.15).

Ponadto, rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych początkowych f, g w następującym sensie: jeśli

$$\|f_1 - f_2\|_{C^1(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon, \qquad \|g_1 - g_2\|_{C^0(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon,$$

to

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \mathrm{const}(T)\varepsilon \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^3 \text{ oraz } t \in [0,T].$$

(Jednoznaczność wynika stąd, że wykazaliśmy, iż **każde** rozwiązanie spełnia wzór Kirchhoffa. Gdy $f \in C^3$ i $g \in C^2$, to prawa strona wzoru Kirchhoffa ma ciągłe pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie, więc i lewa – czyli funkcja u – także. Sprawdzenia wymaga to, czy funkcja określona wzorem Kirchhoffa istotnie spełnia równanie falowe; wystarczy w tym celu prześledzić już wykonane rachunki).

Wniosek 2.5 (Zasada Huygensa). Jeśli dane początkowe f, g mają zwarte nośniki i

$$S = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g,$$

to $u(x,t)=0$ dla wszystkich $t\notin[t_1(x),t_2(x)]$, gdzie

$$\begin{aligned}t_1(x)&=\inf\{t>0:\ S^2(x,ct)\cap S\neq\emptyset\},\\ t_2(x)&=\sup\{t>0:\ S^2(x,ct)\cap S\neq\emptyset\}.\end{aligned}$$

Dowód. Dla $t<t_1(x)$ i dla $t>t_2(x)$ sfera $S^2(x,ct)$ nie ma punktów wspólnych ze zbiorem S, więc funkcje f i g znikają na niej tożsamościowo i obie całki we wzorze Kirchhoffa są równe zero. □

Interpretacja tego wniosku jest dość oczywista: w $\mathbb{R}^3$ źródło dźwięku o ograniczonych rozmiarach można słyszeć tylko przez pewien skończony, ściśle określony czas. Front fali dociera do obserwatora, czy raczej słuchacza, tym szybciej, im większa jest stała c, czyli prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń; po przejściu fali następuje cisza – gdy zbiór S jest zwarty, wartości $u(x,t)$ znikają dla odpowiednio dużych t.

2.3. Wzór Poissona. Czego nie mogą płaszczaki?

Okazuje się, że znajomość wzoru Kirchhoffa pozwala niemal natychmiast wypisać wzór na rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania falowego w dwóch wymiarach przestrzennych (tzn. w $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$).

Pomysł jest bardzo prosty: należy dodać fikcyjny trzeci wymiar x_3 i zaraz potem założyć, że f,g i u w ogóle nie zależą od x_3. Oczywiście u dane jest wzorem Kirchhoffa. Należy ten wzór wypisać (biorąc np. wszędzie $x_3=0$, gdyż f,g i u nie zależą od x_3), a następnie przejść od całkowania po dolnej i górnej połówce sfery $S^2(x,ct)$ do całkowania po dysku. Otrzymamy (proszę samodzielnie wykonać zamianę zmiennych w obu całkach we wzorze Kirchhoffa!)

$$\begin{aligned}2\pi c\, u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\int\limits_{D^2(x,ct)}&\frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{c^2t^2-|z-x|^2}}\Bigg)\\ &+\int\limits_{D^2(x,ct)}\frac{g(z)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{c^2t^2-|z-x|^2}}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Jest to tzw. **wzór Poissona**; x i z są punktami płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, a $D^2(x,ct)$ oznacza dysk o środku x i promieniu ct. Jest więc inaczej niż we wzorze Kirchhoffa: tam całkowaliśmy po sferach, tzn. po zbiorach kowymiaru 1 w $\mathbb{R}^3$, tu natomiast całkujemy po dyskach

– tzn. po zbiorach tego samego wymiaru, co $\mathbb{R}^2$. Dlatego właśnie ze wzoru (2.16) wynika dość ciekawy wniosek.

Mianowicie dla równania falowego w $\mathbb{R}^{2+1}$ zasada Huygensa nie zachodzi, tzn. zbiór $\{t: \ u(x,t) \neq 0\}$ zazwyczaj jest nieograniczony, nawet gdy dane początkowe mają zwarty nośnik. Jeśli bowiem $S = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$, to dla dowolnego punktu x istnieje $t_1 = t_1(x)$ takie, że dla **wszystkich** $t > t_1$ dysk $D^2(x, ct)$ zawiera punkty zbioru S.

Płaszczaki z powieści E.A. Abbotta nie mogą więc – o ile w ich świecie rozprzestrzenianiem się fal akustycznych rządzi to samo równanie falowe – odpoczywać w absolutnej ciszy. Typowy sygnał akustyczny, który już raz dotrze do ustalonego punktu $x \in \mathbb{R}^2$, jest odbierany po wsze czasy; nie ma wyraźnie zaznaczonego tylnego frontu fali, jedynie natężenie odbieranego dźwięku słabnie, ze względu na składnik c^2t^2 pod pierwiastkiem w mianowniku. Zatem, płaszczaki o lekko przytępionym słuchu mogą wieść w miarę normalny żywot (patrz zad. 6 s. 133).

Podobny fenomen ma miejsce także i w wyższych wymiarach: zasada Huygensa obowiązuje jedynie wtedy, gdy wymiar przestrzeni jest liczbą nieparzystą. (Więcej informacji można znaleźć w podrozdziale 2.4 książki L.C. Evansa *Równania różniczkowe cząstkowe*).

2.4. Niejednorodne równanie falowe: całki Duhamela

Niech w dalszym ciągu

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Na zakończenie naszego spotkania z równaniem falowym rozważymy jeszcze zagadnienie Cauchy'ego dla równania niejednorodnego,

$$\begin{cases} Lu(x,t) = h(x,t) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.17}$$

Założymy, że h i g są klasy C^2, f zaś – klasy C^3.

Aby znaleźć rozwiązanie, zapiszemy $u = w + v$, gdzie $Lw = 0$, $w(x,0) = f(x)$, $w_t(x,0) = g(x)$ oraz $Lv = h$, $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$. Funkcja w jest dana wzorem Kirchhoffa. Wystarczy więc rozwiązać zagadnienie (2.17) dla $f, g \equiv 0$.

Niech $\varphi(x,t,s)$ (dodatkową zmienną $s>0$ traktujemy jako parametr) spełnia warunki

$$\begin{cases} L\varphi = 0 & \text{dla } x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ \varphi(x,0,s)=0 & \text{dla } x\in\mathbb{R}^3,\\ \varphi_t(x,0,s)=h(x,s) & \text{dla } x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.18}$$

(Innymi słowy, aby wyznaczyć φ, należy rozwiązać nieskończoną rodzinę zagadnień Cauchy'ego dla jednorodnego równania falowego, indeksowaną parametrem s. Można to oczywiście zrobić, stosując wzór Kirchhoffa).

Połóżmy teraz

$$v(x,t) := \int_0^t \varphi(x,t-s,s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.19}$$

LEMAT 2.6. Funkcja v dana wzorem (2.19) spełnia równanie $Lv=h$ i warunki początkowe $v(x,0)=v_t(x,0)=0$.

Dowód. Oczywiście $v(x,0) = 0$ dla wszystkich x. Różniczkując obie strony (2.19) względem odpowiednich zmiennych, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \varphi(x,0,t) + \int_0^t \varphi_t(x,t-s,s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \varphi_t(x,t-s,s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$v_{tt}(x,t) = \varphi_t(x,0,t) + \int_0^t \varphi_{tt}(x,t-s,s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.21}$$

$$c^2\Delta_x v(x,t) = \int_0^t c^2\Delta_x\varphi(x,t-s,s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.22}$$

Wstawiając $t=0$ w równaniu (2.20), przekonujemy się, że $v_t(x,0)=0$ dla wszystkich x. Odejmując drugie i trzecie równanie stronami, otrzymujemy $Lv=\varphi_t(\cdot,0,\cdot)=h$. $\square$

Wyrażając φ wzorem Kirchhoffa i podstawiając wynik do (2.19), dostaniemy

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_0^t \frac{1}{t-s}\int\limits_{S^2(x,c(t-s))} h(z,s)\,\mathrm{d}\sigma_z\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_0^{ct}\int\limits_{S^2(x,r)} h(z,t-\tfrac{r}{c})\,\mathrm{d}\sigma_z\,\frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{B^3(x,ct)} \frac{h(z,t-\frac{|z-x|}{c})}{|z-x|}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast następujący wniosek

Wniosek 2.7. Wartość $v(x,t)$ zależy jedynie od wartości h w punktach (z,s) położonych na stożku o równaniu

$$|z-x| = c(t-s), \qquad s\in(0,t).$$